第一章 「物理数学」とは

§1. 大学で学ぶ物理学と数学の意味

物理学の言葉は数学である。中学校の「理科」や高等学校の「物理」に現れる自然現象がなぜ発生するのか、それがどのように発生するのか、その結果どの様な状態が現れるのか等々、そこにある現象や法則を適切に表すために数学が言葉として必要である。もしその言葉の使用が禁じられ、その上で自然現象が生じる理由や法則を理解しようとすると、全てを暗記する以外に方法はなくなる。実際に数学の使用に大きな制限があった高校では「物理」が暗記の必要な科目と思われたし、また教員や高校以後の物理学を知らずに成長した大人もそれを強調し、「物理学」の試験にも暗記を強要するような問題が与えられていたことも事実である。

言うまでもなく「物理を学ぶには暗記が必要」はまったくの誤解である。それどころか間違ってさえいる。物理を学ぶには暗記は必要ない。それが証拠に、ノーベル物理学賞の与えられた多くの物理学者は、他の学問分野の研究者に比べ特に優れた暗記力を持っているとは思えない。それでも優れた研究成果を収めることができたのは、「物理」をその適切な言葉である「数学」を使って表現すると、多くの自然現象が同じ言葉で表わされ、しかもとても短い言葉で表されたからである。例えば「電磁気学」を「光学」「電気」「磁気」などと分けて学ぶ必要がなくなるからである。複雑に見えるたくさんの現象がたった一つの短い簡単な言葉で表されたとすれば、その一つを憶えることはそれほど難しいことではない。それが、暗記力の優れていない物理学者が優れた研究の出来た理由である。とはいえども、「物理学」を正しく理解し、冒頭で述べた「考える作法」を身につけるためには、やはり必要最小限の数学が必要である。本書ではその必要最小限の数学を与えるので、それを理解して「物理学」を学んでほしい。

§2. 物理量の次元と単位

高校の「物理」ではあまり強調されなかったと思うが、「物理学」には「**次元**」という重要な概念がある。“三次元テレビ”や“四次元の世界”の“次元”も物理の重要な概念であるが、ここでいう“次元”は意味が違う。物理では様々な物理量を扱う。その中には「エネルギー」「速度」「電流」といった日常生活で馴染み深い量もあれば、「角運動量」や「慣性モーメント」などという、聞いただけではわけが分からない量も多くある。もちろん、それらの名前を憶える必要はない。忘れたら適当な教科書を調べればよい。必要なのはその内容である。

たとえば、代表的な物理量の一つである「速度」という言葉には馴染みがあるはずであろう（後で分かるが、物理では以下の速度を本当は“速さ”と言わなければならない。しかし“速度”の方が馴染みやすいと思うので、ここではこのまま使うことにする）。「速度が時速 60km」というように使う。もちろんその意味は、我々の乗っている自動車がもしこのまま1時間走り続けたら、一時間後に60km離れた地点まで行くという意味である。といっても、実際には信号があったり交通渋滞があったりで、1時間走って30kmも進まないであろう。また、ウサイン・ボルトは100mを 9秒58で走るが、これは時速に換算すれば時速38kmである。ボルトが実際にこの速さで一時間走れないのは明らかであろう。この速度で1分も走れば疲れきってクタクタになるに違いない。

大事なことは速度が「ある決まった時間内に走る距離」であることで、それを知ってさえいれば、そのまま自動車が走り続けると、どのくらいの時間でどこまでいけるかは**“速度”に時間をかければ**分かるし、行きたい遊園地までの**距離を“速度”で割れば**、目的地に行き着く時間が分かる。これは誰もが日常的に行っていることである。

実は、この「**“速さ”に時間をかければ距離になる**」や「**距離を“速さ”で割れば時間になる**」は、距離を時間で割った量が“速さ”として我々の頭の中に浮かんでいるから出来ることなのである。「ある物理量が時間や距離（長さ）がどう組み合わされて作られているか」を表す式に名前が付いていて、それを「**次元**」という。いわば「**次元**は物理量の構造を表す式」と言ってよい。くれぐれも**次元**を、物理量の大きさを測る物差しの**単位**と間違えないように注意してほしい。**次元**を知らなければ物理を理解することはむずかしくなるが、**単位**はもし忘れたら、大きさを計算するときに何かで調べれば十分である。（しかしながら単位を憶えていると、それを調べる時間の節約になることは間違いない。）

自然界にはたくさんの物理量があるが、その基本次元は「**長さ**」と「**時間**」と「**質量**」の 3個しかない。もし扱うのが電気現象である場合はこの 3個に「電流」が加えられる。もし扱うのが多数の粒子からなる系の熱や統計的な現象の場合にはこの3個に粒子数を表す「**モル**」が加えられる。また、もし対象が光である場合は明るさ（光度）を表す「**カンデラ**」が加えられる。この巻では物体の運動を想定するので、現れる物理量の基本次元は「質量」「長さ」「時間」の3個だけである。

ある物理量の次元を知るには、その物理量がどのような意味を持つかを知らなければならない。たとえば、速度の大きさ（速さ） v

は「単位時間あたりに進む距離」すなわち「進んだ長さをそれに要した時間で割った量」であるから、vの次元は長さと時間の基本次元を使って

〈1-1〉(1.2.1) $[\mathrm{v}] = \mathrm{LT}^{-1}$

と書かれる。ここで[…]は…が表す物理量の次元という意味であり、Lは長さ(Length)の基本次元、Tは時間(Time)の基本次元で、T^{-1}はその物理量が作られる時に、時間が分母に一回現れることを表している。

「物理量がどのような意味を持つかを理解すれば、その次元は基本次元がどのように組み合わされているかが分かる」と書いたが、逆に物理量の次元を知ればその物理量の基本的な意味が分かり、他の物理量との関係も分かる。すなわち、次元を知ることは物理量が持つ意味を知ることである。

述べたように、物体の運動に関係する全ての物理量(力学量)の次元は3つの基本次元の組み合わせで出来ている。Lと Tに加えてもう一つの基本次元は質量(Mass)を表す Mである。この三基本次元(M,L,T)の組み合わせで全ての物理量の次元が表される。この他の物理量(「電磁気学量」と「熱学量」)も加えて、実際の例を見てみよう。ついでに物理量の大きさを測る物差しの単位を与えたが、さしあたって必要ない。

力学量の次元($[\mathrm{M^aL^bT^c}]$)と単位

力学量	次元$[\mathrm{M^aL^bT^c}]$	単位(MKS)[1]	単位(CGS)[1]
速度	$\mathrm{LT^{-1}}$	$\mathrm{m/s}$	$\mathrm{cm/s}$
加速度	$\mathrm{LT^{-2}}$	$\mathrm{m/s^2}$	$\mathrm{cm/s^2}$
力	$\mathrm{MLT^{-2}}$	$\mathrm{kg\cdot m/s^2}$	$\mathrm{g\cdot cm/s^2}$
エネルギー	$\mathrm{ML^2T^{-2}}$	$\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^2}$	$\mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^2}$
角速度	$\mathrm{T^{-1}}$	$\mathrm{rad/s}$	$\mathrm{rad/s}$
角運動量	$\mathrm{ML^2T^{-1}}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s}$	$\mathrm{g\cdot cm^2/s}$
振動数	$\mathrm{T^{-1}}$	$1/\mathrm{s}$	$1/\mathrm{s}$

(注意1)「rad」は角度の単位であるラジアンを表す記号であり、次元を持たないので次元の式には現れない。

電磁気学量の次元($[\mathrm{M^aL^bT^cA^d}]$)と単位

電磁気学量	次元($[\mathrm{M^aL^bT^cA^d}]$)	単位(MKSA)	単位(CGSA)
電流	A	A	A
電荷	TA	$\mathrm{A\cdot s{=}C}$	$\mathrm{A\cdot s}$
電流密度	$\mathrm{L^{-2}A}$	$\mathrm{A/m^2}$	$\mathrm{A/cm^2}$
電場	$\mathrm{MLT^{-3}A^{-1}}$	$\mathrm{kg\cdot m/(A\cdot s^3)}$ $\mathrm{= V/m = N/C}$	$\mathrm{g\cdot cm/(A\cdot s^3)}$
電位	$\mathrm{L^2MT^{-3}A^{-1}}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/(A\cdot s^3)}$ $\mathrm{= J/C = V}$	$\mathrm{g\cdot cm^2/(A\cdot s^3)}$
磁場	$\mathrm{AL^{-1}}$	$\mathrm{A/m}$	$\mathrm{A/cm}$
電気抵抗	$\mathrm{ML^2T^{-3}A^{-2}}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/(s^3\cdot A^2)}$ $\mathrm{= V/A} = \Omega$	$\mathrm{g\cdot cm^2/(s^3\cdot A^2)}$
電気容量	$\mathrm{M^{-1}L^{-2}T^4A^2}$	$\mathrm{A^2\cdot s^4/(kg\cdot m^2)}$ $\mathrm{= C/V = F}$	$\mathrm{A^2\cdot s^4/(g\cdot cm^2)}$

（注意1）「C」は電荷の単位を表わし、クーロンと呼ぶ。

熱力学量の次元$\left([\mathrm{M^aL^bT^cK^d}]\right)$と単位

熱力学量	次元$[\mathrm{M^aL^bT^cK^d}]$)	単位(MKS)	単位(CGS)
温度	K	K	K
ボルツマン定数	$\mathrm{ML^2T^{-2}K^{-1}}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/(s^2\cdot K)}$ $=\mathrm{J/K}$	$\mathrm{g\cdot cm^2/(s^2\cdot K)}$ $=\mathrm{erg/K}$
熱容量	$\mathrm{ML^2T^{-2}K^{-1}}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/(s^2\cdot K)}$ $=\mathrm{J/K}$	$\mathrm{g\cdot cm^2/(s^2\cdot K)}$ $=\mathrm{erg/K}$
エントロピー	$\mathrm{ML^2T^{-2}K^{-1}}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/(s^2\cdot K)}$ $=\mathrm{J/K}$	$\mathrm{g\cdot cm^2/(s^2\cdot K)}$ $=\mathrm{erg/K}$
圧力	$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$	$\mathrm{kg/(m\cdot s^2)}$	$\mathrm{g/(cm\cdot s^2)}$
体積	$\mathrm{L^3}$	$\mathrm{m^3}$	$\mathrm{cm^3}$
密度	$\mathrm{ML^{-3}}$	$\mathrm{kg/m^3}$	$\mathrm{g/cm^3}$
自由エネルギー	$\mathrm{ML^2T^{-2}}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$ $=\mathrm{J}$	$\mathrm{g\cdot cm^2/s^2}$ $=\mathrm{erg}$

物理で自然法則や自然現象を表すために数式や方程式を使う。方程式が与えられたからといって、特に数値が式に含まれる場合は、それをそのまま使おうとすると面倒なことが時々起きる。それを避けるために「無次元化」という手続が必要になることがある。

「無次元化」は必ずしも面倒を避けるために行うだけではない。無次元化した方程式をながめるだけで、面倒な数学を使って方程式を解かなくても答えがどの程度になるかを簡単に知ることができる。実際に生活する上では、それで十分なことがほとんどである。たとえば、原子の大きさは 100億分の1メートル$(0.0000000001$メートル$)$程度であるが、もしその大きさが1メートルであれば世界は大変なことになる。しかし、たとえそれが100億分の 2メートル$(0.0000000002$メートル$)$になったとしても、理解に大した問題は生じない。重要なことは、小数点以下に0が9個並ぶほど、原子が小さいことである。これを知るには難しい方程式を四苦八苦して解かなくてもよい。もし無次元化した原子の性質を表す方程式が与えられていれば、そのおおよその大きさを暗算で求めることが出来る。そのような実例は物理で多く出てくる。

【知っておくべきこと】

次元に関係して、物理で多く使われる二つの関数について知っておくべきことがある。

1. 三角関数の角度は「°（度）」で表されるか、あるいは「ラジアン」で表されるが、いずれも次元を持たない。例えば、 $sin\,(kx-\omega t)$の角度部分 $(kx-\omega t)$は次元を持たない。したがって$(kx-\omega t)$の中にあるtが時間（次元はT）であれば、ωtの組み合わせが無次元 (T^0)であるためには ωの次元はT^{-1}でなければならない。
2. 同様に、指数関数e^xの指数 xは無次元でなければならない。

§3. 関数

中学の数学で次のような一次関数を学ぶ。

〈1-2〉 (1.3.1) $y=ax+b$

もし右辺のaとbが決まった値を持っていれば、xに適当な値を与えると左辺の yが定まる。このとき、決まった値を持つ aやbを「**定数**」と呼び、いろいろな値をとるxやyを「**変数**」という。特に、我々が勝手に値を与えることができるxを「**独立変数**」、それが与えられると値が決まるyを 「**従属変数**」という[2]。さらに、与えられた独立変数から従属変数を決める(1.3.1)式を「**数式**」あるいは

「**等式**」という。a、b、cが定数で、xが独立変数である

<1-3> (1.3.2) $y = b\ \sin\ (ax) + c$

も、yの決まり方が(1.3.1)式より少し複雑になっているが、やはり数式である。

yの決まり方が複雑であろうが簡単であろうが、数式が分かりさえすればそれにしたがって yを計算することができる。ところが、数式が具体的に分かっていなくても、「xを与えた時にyを決める数式がもし与えられているとすれば、…」といって話を先に進めたい場合がしばしばある。このような時には、さしあたって数式を書いておきたい。そのときには、計算の手続きを表す英語「f unction(関数)」の頭文字を借りて、yを与える数式を

<1-4> (1.3.3) $y = f(x)$

と書いておく。すなわち、

関数$f(x)$は「xを与えた時にyを決める計算手順」という意味である。

具体例を一つ示そう。(1.3.2)式のように関数が具体的に$f = b\ \sin\ (ax) + c$と与えられている場合には、fの働きは独立変数xを与えた時に、

1. xを定数a倍する
2. その正弦(サイン)を計算する
3. それを定数b倍する
4. その結果に定数cを加える

という一連の計算手順を表している。このように、

- 「関数」$f(x)$は「xが与えられた時に従属変数を計算する手順」の仮の名前

であって、

- 「数式」は、もし独立変数xの値が与えられたら、右辺の手順にしたがって従属変数 yの値を具体的に計算することができる

のとはまったく違う。「関数」と「数式」の違いをここでしっかりと理解しておいてほしい。

独立変数の数は必ずしも一つではない。たとえばkと ωを定数とする(1.3.2)式の$y = \ \sin\ (kx - \omega t)$の場合は、$x$と$t$の二つが独立変数であり、それらの値を与えると$y$の値が決まる。関数がさらに多くの独立変数を持つ場合もある。その時には独立変数を表す多数の文字が必要になる。そのような場合には、たとえば

<1-5> (1.3.4) $y = f(x_1, x_2, x_3, \cdots)$

とする。この等式では$x_1, x_2, x_3, \cdots$が独立変数であり、「それら全てを与えると、関数fによって表される計算手順にしたがいyが決まる。」という意味である。

独立変数が一個の場合の数式(1.3.3)式にもどろう。この数式が「与えられたxに対し、関数fの手順に従ってyを与える」ことは理解できたと思う。この順序を逆にして、fの手順にしたがって計算したときにあるyの値を生じる xの値を知りたいときがある。そのような場合に(1.3.3)式を「**方程式**」といい、そのyの値を与えるxを求めることを「**方程式を解く**」といい、そして求められたxを「**方程式の解(根)**」という。たとえば、関数$f(x) = x^2 - 3x + 2$があったとき、$y = 0$を与えるxの値を求める方程式は$x^2 - 3x + 2 = 0$であり、その根は$x = 1$および$x = 2$である。

等式の従属変数に値を与え、それを方程式として独立変数を求めるときに注意しないといけないことがある。それは

1. 従属変数yが一次で等式に現れ、独立変数 xが冪で関数に含まれる場合と、
2. 従属変数yが一次ではない冪を持って等式に現れる場合

である。

1. **従属変数が一次の等式$y = f(x)$の関数が上の例のように1より大きな冪を持つ独立変数を含んでいれば、方程式の解は一般に複数個存在する。**

この場合として等式がx^2や x^3を含む場合もあれば、$x^{1.5}(= x\sqrt{x})$のような冪を含む場合もあるであろう。実際に関数がx^2を含む上の例では、解は2個存在した。一方、

2. **等式が従属変数(y)を冪で含む場合は、独立変数 (x)を冪で含む場合と状況が大きく異なる。**

具体的な例として似たような二つの等式、「$y = x^2$」と「$y^2 = x$」を使って何が起きるかを説明しよう。最初に、等式が独立変数 (x)を冪で含む方程式

〈1-6〉 (1.3.5) $y = x^2$

を考える。たとえばこの右辺のxに2という値を与えればyは 4になる。ここまでは(1.3.5)式を単純に独立変数を与えて従属変数を算出する等式と考えているので何も問題はない。そこであらためて、(1.3.5)式が従属変数のyに 4を与えるようなxを求める方程式、すなわち

〈1-7〉 $4 = x^2$

であるとする。すなわち「従属変数の値が4になる xを探せ」というのである。xがこれを満たせば良いだけなら、それが$x = +2$である必要はない。xが -2であるとしてもyは4になる。つまり、この方程式の解（根）は $x = +2$または $x = -2$である。このように、方程式が独立変数を 1より大きな冪で含む場合は一般に解が複数個（今の場合は 2個）存在する。
 次に方程式が従属変数(y)を冪で含む場合

〈1-8〉 (1.3.6) $y^2 = x$

を考える。この方程式は(1.3.5)式と少ししか違わないと思うかもしれないが、方程式の数学的性質は全く異なる。(1.3.5)式の場合は独立変数 xの値を一つ与えれば従属変数yの値が一つ決まるが、その同じyの値を与える独立変数が一つではないというのが特徴であった。つまり1つのyと2つのxが対応する。一方(1.3.6)式の場合は、xの値を一つ与えたときに定まるのが y^2であるために yの値が複数個あるのである。たとえば(1.3.6)式で xを4とすれば $y^2 = 4$であるから、yは$+2$であっても-2であってもy^2は4となるのである。つまり 2つの yと1つの xが対応する。このように、一つの独立変数 (x)の値に対して複数個の従属変数 (y)の値が対応するとき、yはxの「**多価関数**」であると言う。(1.3.6) 式の場合は一つのxに対し二つの yの値が対応するので、yはxの2価関数である。
 多価関数の典型的な例は三角関数である。たとえば、後にわかるが、$sin\ y$はyの全ての冪を含むので、方程式 $sin\ y = x$で与えられる yは無限の多価関数である。たとえば $x = 0$とすると $sin\ y = 0$であり、そうなるyは 0であるかもしれないが、任意の整数を nとしたとき$y = 180^\circ \times n$で与えられる全ての yが $sin\ y = 0$を与える。したがって$x = 0$と対応するyはnの数だけ（すなわち無数に）存在することになる。
 さて(1.3.3)式に戻って、関数$f(x)$の具体的な形を与えずに（あるいは関数が不明なときに）、与えたyに対して方程式が解け xが求められたものとして、話を先に進めなければならない場合を考える。そのときには与えられたyに対する方程式(1.3.3)式の解 xを

〈1-9〉 (1.3.7) $x = f^{-1}(y)$

と書く。この$f^{-1}(y)$を関数$f(x)$の**逆関数**という[3]。簡単な例でこれを具体的に示そう。方程式

〈1-10〉（1.3.8）
$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= ax + b \end{aligned}$$

を考え、そしてyになにか値が与えられたとする。もし aが0でなければ、この場合の逆関数は簡単に求まり、

〈1-11〉（1.3.9）
$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(y) \\ &= \frac{y-b}{a} \end{aligned}$$

である。この$\dfrac{y-b}{a}$を実際に(1.3.8)式右辺のxに代入すると確かに yが現れることは容易に確かめられるであろう。
逆関数の例をいくつか与えておく:

〈1-12〉（1.3.10）
$$y = \begin{cases} \mathrm{e}^{x} \\ \sin x \\ \sin(x^3) \\ (\sin x)^{1/3} \end{cases}$$

のそれぞれに対する逆関数は

〈1-13〉（1.3.11）
$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(y) \\ &= \begin{cases} \ln y \\ \sin^{-1} y \\ \sqrt[3]{\sin^{-1} y} \\ \sin^{-1}(y^3) \end{cases} \end{aligned}$$

で与えられる。

[1]「MKS単位」は質量の単位に(Kg)、長さ（距離）の単位に(m)、時間の単位に(秒 (s))を用いて表した単位である。また、「CGS単位」は質量の単位に(g)、長さ（距離）の単位に (cm)、時間の単位に(秒 (s))を用いて表した単位である。

[2] ここでは独立変数を表すのに文字x、従属変数を表すのに文字yを使っているが、独立変数と従属変数にこれらの文字を使う必要は必ずしもない。何が独立変数であって何が従属変数であるかは変数を表す文字で区別するのではなく、あくまでも変数が持つ役割で区別する。すなわち、我々が自由に制御することが出来る変数があればそれは独立変数であって、その変数を与えることによって決まる変数があればそれは従属変数である。したがって変数の役割が明確でありさえすれば、それらを表す文字に何を使ってもよい。同様に(1.3.3)式の関数を表すのに必ずしも文字fを使う必要はない。それが関数であることが分かりさえすればgでも hでも、なんでもよい。実際にその例がこれからたくさん出てくる。

[3] aの逆数 $\left(\dfrac{1}{a}\right)$を指数表現で$\left(a^{-1}\right)$と書くが、(2.1.7)式の fの逆関数$\left(f^{-1}\right)$は $\left(\dfrac{1}{f}\right)$のことではない。この$\left(f^{-1}\right)$は関数$f$の逆関数を表す記号である。違いは$a$が変数名であるのに対して、$f$が関数名であることにある。