

「力学入門」

編集： 障害学生支援プロジェクト(DSSP)

編集責任者： 鈴木公(元東京理科大学)

第0章 はじめに

我が国の 理工系大学で学ぶ障害を持った学生の数は他国と比較して非常に少ない。その中でも視覚障害を持つ学生の少なさは際立っている。高等学校までの理数教育と大学の受け入れ態勢に根本的な問題はあがあるが、理工系大学で学ぼうとする視覚障害を持った学生に配慮された専門分野への入門的な教科書がないこともその理由の一つと思われる。「視覚障害を持った学生に対する配慮」とは、教科書の内容ではなく、記載上の表現や記法に関わる心遣いである。一般に、晴眼学生を対象に書かれた理工系教科書には複雑な図表が多く使われており、また無意識に晴眼学生を念頭に置いた表現が使われている。そのため、視覚障害を持つ学生が学習に困難を感じることも少なからずある。それが視覚障害を持つ学生に理工系大学で学ぶ意欲を削ぐ原因の一つになっている。

この数巻の入門教科書は理工系大学で物理の学習を必要とする視覚障害を持った学生を意識して書かれた。従って、学習の補助として図を使用することを極力避けた。やむ得ず図を使用する場合は、触図が無くても図の内容が想像出来るように丁寧な説明を付けた。たとえ補助的な図が無くても、内容が分かりさえすれば誰でもそのイメージを描くことが出来る。実際にアインシュタインや現代の素粒子物理学者は数学の助けを借りて図に描くことが出来ない4次元や9次元世界のイメージを頭の中に描き、それを理解して来た。たとえ視覚障害を持つ学生であっても、イメージを描くことは出来る。その妨げになることがあるとすれば、晴眼者であるか 視覚障害者であるかによらず、それをやろうとしない心との戦いだけである。記述上のこの特徴を除き、本シリーズは他の物理学教科書となんら異なる所はない。したがって、本シリーズは物理学を必要とする晴眼学生にとっても十分に利用価値があるはずである。2014年時点で、この教科書を必要とする理工系大学に学ぶ視覚障害を持った学生は決して多くないが、いつの日かこの国の理工系大学で学ぶ視覚障害を持った学生が様々な分野で増え、本シリーズがその役に立つことを期待する。本シリーズにはもう一つの目的がある。すなわち「物理学」を学ぶことによって「考える作法」を身に付けることである。理工系大学の全ての学部(理学部、工学部、農学部、薬学部、医学部など)は入学した初年度の学生に対し、「物理学」の履修を義務づけている。それらの専門学習に「物理学」の法則や科学知識が必要になるからである。また、「物理学」を必修科目に位置づける文系学部も決して少なくない。その目的が必ずしも「物理学」の専門知識を身に付けることにあるのではないことは明らかであろう。そこには別な目的がある。「物理学」は2500年以上も前に「自然哲学」として世の中に現れた。我々の生活に密接に関係する自然を理解するために、我々は身の周りで展開される自然現象を正しく理解しなければならず、それを正しく理解するためには正しく考える方法を持たなければならず、そのためには最も身近な存在である人間を理解することが必要であった。すなわち「自然哲学」は人間を知るために、自然を正しく理解しようとする学問であった。その「自然哲学」が中世から近世にかけ「自然科学」の方向に深く分け入った時、それに「物事の筋道(理)」を意味する「物理」の呼称が与えられたのである。つまり「物理」は、複雑な自然と人間を理解するために正しく考える方法を与える学問であったのである。このことが理系・文系を問わず多くの大学学部が伝統的に「物理学」を必修科目としている理由なのである。「物理学」が高等学校の 学習段階で「理系科目」とされ、そのため「文系」には必要がないと考えられたり、試験のために暗記が必要な学問であると誤解されてしまったのはとても不幸なことであった。このシリーズで物理を学ぶことによって、「物理学」が本来意図する「物事のことわり(理)」を理解する方法、すなわち「考える作法」を身に付けてもらいたい。

本章中でかぎカッコで括られた数字番号(例えば $\langle 100 \rangle$)が付いた数式は以下のどちらかの方法で理解することが出来る。

- (1) パソコン画面に表示された数式を音声読み上げソフトを使って読む方法
- (2) 数式のTeXプログラムを音声読み上げソフトを使って読む方法

である。(2)の方法を使いたい読者のために、数式のTeXプログラムが巻末に与えられている。もしそのTeXプログラムを使って数式を再現したければ、適当なTeXのオンライン翻訳サイトにある数式翻訳機能を使うことができる。例えば

1. <http://www.sciweavers.org/free-online-latex-equation-editor>を開く。

2. その数式ウィンドウに巻末のTeXプログラムをそのまま貼り付ける。
3. ウィンドウ横の「Convertボタン」をおす。

これで、数式ウィンドウの下部の「to」以下に数式を再現することができる。

§ 1. 大学で学ぶ物理学と数学の意味

物理学の言葉は数学である。中学校の「理科」や高等学校の「物理」に現れる自然現象がなぜ発生するのか、それがどのように発生するのか、その結果どのような状態が現れるのか等々、そこにある現象や法則を適切に表すために数学が言葉として必要である。もしその言葉の使用が禁じられ、その上で自然現象が生じる理由や法則を理解しようとすると、全てを暗記する以外に方法はなくなる。実際に数学の使用に大きな制限があった高校では「物理」が暗記の必要な科目と思われたし、また教員や高校以後の物理学を知らずに成長した大人もそれを強調し、「物理学」の試験にも暗記を強要するような問題が与えられていたことも事実である。

言うまでもなく「物理を学ぶには暗記が必要」はまったくの誤解である。それどころか間違っただけである。物理を学ぶには暗記は必要ない。それが証拠に、ノーベル物理学賞の与えられた多くの物理学者は、他の学問分野の研究者に比べて特に優れた暗記力を持っているとは思えない。それでも優れた研究成果を収めることができたのは、「物理」をその適切な言葉である「数学」を使って表現すると、多くの自然現象が同じ言葉で表わされ、しかもとても短い言葉で表されたからである。例えば「電磁気学」を「光学」「電気」「磁気」などと分けて学ぶ必要がなくなるからである。複雑に見えるたくさんの現象がたった一つの短い簡単な言葉で表されたとすれば、その一つを憶えることはそれほど難しいことではない。それが、暗記力の優れていない物理学者が優れた研究の出来た理由である。とはいえども、「物理学」を正しく理解し、冒頭で述べた「考える作法」を身につけるためには、やはり必要最小限の数学が必要である。本書ではその必要最小限の数学を与えるので、それを理解して「物理学」を学んでほしい。

§ 2. 物理量の次元と単位

高校の「物理」ではあまり強調されなかったと思うが、「物理学」には「次元」という重要な概念がある。「三次元テレビ」や「四次元の世界」の「次元」も物理の重要な概念であるが、ここでいう「次元」は少し意味が違う。物理では様々な物理量を扱う。その中では「エネルギー」「速度」「電流」といった日常生活で馴染み深い量から、「角運動量」や「慣性モーメント」などという、聞いただけではわけが分からない量が多く出てくる。もちろん、それらの名前を憶える必要はない。忘れたら適当な教科書を調べればよい。必要なのはその内容である。

たとえば、代表的な物理量の一つである「速度」という言葉には馴染みがあるはずであろう(後で分かるが、物理では以下の速度を本当は“速さ”と言わなければならない。しかし“速度”の方が馴染みやすいと思うので、このまま使うことにする)。「速度が時速60km」というように使う。もちろんその意味は、我々の乗っている自動車がもしこのまま1時間走り続けたら、一時間後に60km離れた地点まで行くという意味である。といっても、実際には信号があったり交通渋滞があったりで、1時間走って30kmも進まないであろう。また、ウサイン・ボルトは100mを9秒58で走るが、これは時速に換算すれば時速138kmである。ボルトが実際にこの速さで一時間走れないのは明らかであろう。この速度で1分も走れば疲れきってクタクタになるに違いない。

大事なことは速度が「ある決まった時間内に走る距離」であることで、それを知ってさえいれば、そのまま自動車が走り続けると、どのくらいの時間でどこまでいけるかは「速度」に時間をかければ分かるし、行きたい遊園地までの距離を「速度」で割れば、目的地に行き着く時間が分かる。これは誰もが日常的に行っていることである。

実は、この「速さに時間をかければ距離になる」や「距離を速さで割れば時間になる」は、距離を時間で割った量が“速さ”として我々の頭の中に浮かんでいるから出来ることなのである。「ある物理量が時間や距離(長さ)がどう組み合わせられて作られているか」を表す式に名前が付いていて、それを「次元」という。いわば「次元は物理量の構造を表す式」と言ってよい。くれぐれも次元を、物理量の大きさを測る物差しとの単位と間違えないように注意してほしい。次元を知らなければ物理を理解することはむかしくなるが、単位はもし忘れたら、大きさを計算するときに何かで調べれば十分である。(しかしながら単位を憶えていると、それを調べる時間の節約ができることは間違いない。)

自然界にはたくさんの物理量があるが、その基本次元は「長さ」と「時間」と「質量」の3個しかない。もし扱うのが電気現象である場合はこの3個に「電流」が加えられる。もし扱うのが多数の粒子からなる系の熱や統計的な現象の場合にはこの3個に粒子数を表す「モル」が加えられる。また、もし対象が光である場合は明るさ(光度)を表す「カンデラ」が加えられる。この巻では物体の運動を想定するので、現れる物理量の基本次元は「質量」「長さ」「時間」の3個だけである。

ある物理量の次元を知るには、その物理量がどのような意味を持つかを知らなければならない。たとえば、速度の大きさ(速さ) v は「時間あたりに進む距離」すなわち「進んだ長さをそれに要した時間で割った量」であるから、 v の次元は長さ(長さ)と時間の基本次元を使って

$$\langle 0-1 \rangle (0.2.1) [v] = LT^{-1}$$

と書かれる。ここで[⋯]は⋯が表す物理量の次元という意味であり、Lは長さ(Length)の基本次元、Tは時間(Time)の基本次元で、 T^{-1} はその物理量が作られる時に、時間が分母に一回現れることを表している。

「物理量がどのような意味を持つかを理解すれば、その次元は基本次元がどのように組み合わせられているかが分かる」と書いたが、逆に物理量の次元を知ればその物理量の基本的な意味が分かり、他の物理量との関係も分かる。すなわち、次元を知るとは物理量を持つ意味を知ることである。

述べたように、物体の運動に関係する全ての物理量(力学量)の次元は3つの基本次元の組み合わせで出来ている。LとTに加えてもう一つの基本次元は質量(Mass)を表すMである。この三基本次元(M,L,T)の組み合わせで全ての物理量の次元が表される。この他の物理量(「電磁気学量」と「熱学量」)も加えて、実際の例を見てみよう。ついでに物理量の大きさを測る物差し単位を与えたが、さしあたって必要ない。

力学量の次元([M^aL^bT^c])と単位

| 力学量 | 次元[M ^a L ^b T ^c] | 単位(MKS)[1] | 単位(CGS)[1] |
|-------|---|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 速度 | LT ⁻¹ | m/s | cm/s |
| 加速度 | LT ⁻² | m · s ⁻² | cm · s ⁻² |
| 力 | MLT ² | kg · m/s ² | g · cm/s ² |
| エネルギー | ML ² T ⁻² | kg · m ² · s ⁻² | g · cm ² · s ⁻² |
| 角速度 | T ⁻¹ | rad/s | rad/s |
| 角運動量 | ML ² T ⁻¹ | kg · m ² /s | g · cm ² /s |
| 振動数 | T ⁻¹ | 1/s | 1/s |

(注意1)「rad」は角度の単位であるラジアンを表す記号であり、次元を持たないので次元の式には現れない。

電磁気学量の次元([M^aL^bT^cA^d])と単位

| 電磁気学量 | 次元([M ^a L ^b T ^c A ^d]) | 単位(MKSA) | 単位(CGSA) |
|-------|--|---|---|
| 電流 | A | A | A |
| 電荷 | T · A | A · s = C | A · s = C |
| 電流密度 | L ⁻² · A | A/m ² | A/cm ² |
| 電場 | MLT ⁻³ A ⁻¹ | kg · m / (A · s ³) = V/m = N/C | kg · m / (A · s ³) = V/m = N/C |
| 電位 | L ² MT ⁻³ A ⁻¹ | kg · m ² / (A · s ³) = J/C = V | g · cm ² / (A · s ³) = erg/C = V |
| 磁場 | AL ⁻¹ | A/m | A/cm |
| 電気抵抗 | ML ² T ⁻³ A ⁻² | kg · m ² / (s ³ · A ²) = V/A = Ω | g · cm ² / (s ³ · A ²) = V/A = Ω |
| 電気容量 | M ⁻¹ L ⁻² T ⁴ A ² | A ² · s ⁴ / (kg · m ²) = C/V = F | A ² · s ⁴ / (g · cm ²) = C/V = F |

熱力学量の次元 ($[M^a L^b T^c K^d]$)

| 熱力学量 | 次元 $[M^a L^b T^c K^d]$ | 単位(MKS) | 単位(CGS) |
|---------|------------------------|---|---|
| 温度 | K | K | K |
| ボルツマン定数 | $ML^2 T^{-2} K^{-1}$ | $kg \cdot m^2 / (s^2 \cdot K)$ = J/K | $g \cdot cm^2 / (s^2 \cdot K)$ = erg/K |
| 熱容量 | $ML^2 T^{-2} K^{-1}$ | $kg \cdot m^2 / (s^2 \cdot K)$ = J/K | $kg \cdot m^2 / (s^2 \cdot K)$ = J/K |
| エントロピー | $ML^2 T^{-2} K^{-1}$ | $kg \cdot m^2 / (s^2 \cdot K)$ = J/K | $g \cdot cm^2 / (s^2 \cdot K)$ = erg/K |
| 圧力 | $ML^{-1} T^{-2}$ | $kg / (m \cdot s^2)$ | $g / (cm \cdot s^2)$ |
| 体積 | L^3 | m^3 | cm^3 |
| 密度 | ML^{-3} | kg / m^3 | g / cm^3 |
| 自由エネルギー | $ML^2 T^{-2}$ | $kg \cdot m^2 / s^2$ = J | $g \cdot cm^2 / s^2$ = erg |

物理で自然法則や自然現象を表すために数式や方程式を使う。方程式が与えられたからといって、特に数値が式に含まれる場合は、それをそのまま使おうとすると面倒なことが時々起きる。それを避けるために「無次元化」という手続が必要になることがある。

「無次元化」は必ずしも面倒を避けるために行うだけではない。無次元化した方程式をながめるだけで、面倒な数学を使って方程式を解かなくても答えがどの程度になるかを簡単に知ることができる。実際に生活する上では、それで十分なことがほとんどである。たとえば、原子の大きさは100億分の1メートル(0.0000000001メートル)程度であるが、もしその大きさが1メートルであれば世界は大変なことになる。しかし、たとえそれが100億分の2メートル(0.0000000002メートル)メートルになったとしても、理解に大した問題は生じない。重要なことは、小数点以下に0が10個並ぶほど、原子が小さいことである。これを知るには難しい方程式を四苦八苦して解かなくてもよい。もし無次元化した原子の性質を表す方程式が与えられていれば、そのおおよその大きさを暗算で求めることが出来る。そのような事例は物理で多く出てくる。

【知っておくべきこと】

次元に関して、物理で多く使われる二つの関数について知っておくべきことがある。

1. 三角関数の角度は「° (度)」で表されるか「ラジアン」で表されるが、いずれも次元を持たない。例えば、 $\sin(kx - \omega t)$ の角度部分 $(kx - \omega t)$ は次元を持たない。したがって $(kx - \omega t)$ の中にある t が時間(次元はT)であれば、 ωt の組み合わせが無次元 (T^0) であるためには ω の次元は T^{-1} でなければならない。
2. 同様に、指数関数 e^x の指数 x は無次元でなければならない。

§ 3. 関数

中学の数学で次のような一次関数を学ぶ。

$$\langle 0-2 \rangle \quad (0.3.1) \quad y = ax + b$$

もし右辺の a と b が決まった値を持っていれば、 x に適当な値を与えると左辺の y が定まる。このとき、決まった値を持つ a や b を「定数」と呼び、いろいろな値をとる x や y を「変数」という。特に、我々が勝手に値を与えることができる x を「独立変数」、それが与

えられると値が決まる y を「従属変数」という[2]。さらに、与えられた独立変数から従属変数を決める(0.3.1)式を「数式」あるいは「等式」という。 a 、 b 、 c が定数で、 x が独立変数である

$$\langle 0-3 \rangle \quad (0.3.2) \quad y = b \sin(ax) + c$$

も、 y の決まり方が(0.3.1)式より少し複雑になっているが、やはり数式である。

y の決まり方が複雑であろうが簡単であろうが、数式が分かりさえすればそれにしたがって y を計算することができる。ところが、数式が具体的に分かっていなくても、「 x を与えた時に y を決める数式がもし与えられているとすれば、…」とって話を先に進めたい場合がしばしばある。このような時には、さしあたって数式を書いておきたい。そのときには、計算の手続きを表す英語「function(関数)」の頭文字を借りて、 y を与える数式を

$$\langle 0-4 \rangle \quad (0.3.3) \quad y = f(x)$$

と書いておく。すなわち、

関数 $f(x)$ は「 x を与えた時に y を決める計算手順」という意味である。

具体例の一つ示そう。(0.3.2)式の関数が具体的に $f = b \sin(ax) + c$ と与えられている場合には、 f の働きは独立変数 x を与えた時に、

1. x を定数 a 倍する
2. その正弦(サイン)を計算する
3. それを定数 b 倍する
4. その結果に定数 c を加える

という一連の計算手順を表している。このように、

1. 「関数 $f(x)$ は「 x が与えられた時に従属変数を計算する手順」の仮の名前

であって、

1. 「数式」は、もし独立変数 x の値が与えられたら、右辺の手順にしたがって従属変数 y の値を具体的に計算することができる

のとはまったく違う。「関数」と「数式」の違いをここでしっかりと理解しておいてほしい。

独立変数の数は必ずしも一つではない。たとえば k と ω を定数とする $y = \sin(kx - \omega t)$ の場合は、 x と t の二つが独立変数であり、それらの値を与えると y の値が決まる。関数がさらに多くの独立変数を持つ場合もある。その時には独立変数を表す多数の文字が必要になる。そのような場合には、たとえば

$$\langle 0-5 \rangle \quad (0.3.4) \quad y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

とする。この等式では x_1, x_2, x_3, \dots が独立変数であり、「それら全てを与えると、関数 f によって表される計算手順にしたがい y が決まる。」という意味である。

独立変数が一個の場合の数式(0.3.3)式にもどろう。この数式が「与えられた x に対し、関数 f の手順に従って y を与える」ことは理解できたと思う。この順序を逆にして、 f の手順にしたがって計算したときにある y の値を生じる x の値を知りたいときがある。そのような場合に(0.3.3)式を「方程式」といい、その y の値を与える x を求めることを「方程式を解く」といい、そして求められた x を「方程式の解(根)」という。たとえば、関数 $\langle 0-6 \rangle$ ($f(x) = x^2 - 3x + 2$)があったとき、 $y = 0$ を与える x の値を求める方程式は $\langle 0-7 \rangle$ ($x^2 - 3x + 2 = 0$)であり、その根は $x = 1$ および $x = 2$ である。

等式の従属変数に値を与え、それを方程式として独立変数を求めるときに注意しないといけないことがある、それは

1. 従属変数 y が一次で等式に現れ、独立変数 x が冪で関数に含まれる場合と、

2. 従属変数 y が一次ではない冪を持って等式に現れ場合

である。

1. 従属変数が一次の等式 $y = f(x)$ にある関数が上の例のように1より大きな冪を持つ独立変数を含んでいれば、方程式の解は一般に複数個存在する。

この場合として等式が x^2 や x^3 を含む場合もあれば、 $x^{1.5} (= x\sqrt{x})$ のような冪を含む場合もあるであろう。実際に関数が x^2 を含む上の例では、解は2個存在した。一方、

2. 等式が従属変数 (y) を冪で含む場合は、独立変数 (x) を冪で含む場合と状況が大きく異なる。

具体的な例として似たような二つの等式、「 $y = x^2$ 」と「 $y^2 = x$ 」を使って何が起きるかを説明しよう。最初に、等式が独立変数 (x) を冪で含む方程式

$$\langle 0-8 \rangle \quad (0.3.5) \quad y = x^2$$

を考える。たとえばこの右辺の x に 2 という値を与えれば y は 4 になる。ここまでは (0.3.5) 式を単純に独立変数を与えて従属変数を算出する等式と考えているので何も問題はない。そこであらためて、(0.3.5) 式が従属変数の y に 4 を与えるような x を求める方程式、すなわち

$$\langle 0-9 \rangle \quad 4 = x^2$$

であるとする。すなわち「従属変数の値が 4 になる x を探せ」というのである。 x がこれを満たせば良いだけなら、それが $x = +2$ である必要はない。 x が -2 であるとしても y は 4 になる。つまり、この方程式の解(根)は $x = +2$ または $x = -2$ である。このように、方程式が独立変数を 1 より大きな冪で含む場合は一般に解が複数個(今の場合は 2 個)存在する。

次に方程式が従属変数 (y) を冪で含む場合

$$\langle 0-10 \rangle \quad (0.3.6) \quad y^2 = x$$

を考える。この方程式は (0.3.5) 式と少ししか違わないと思うかもしれないが、方程式の数学的性質は全く異なる。(0.3.5) 式の場合は独立変数 x の値を一つ与えれば従属変数 y の値が一つ決まるが、その同じ y の値を与える独立変数が一つではないというのが特徴であった。つまり 1つの y と 2つの x が対応 する。一方 (0.3.6) 式の場合は、 x の値を一つ与えたときに定まるのが y^2 であるために y の値が複数個あるのである。たとえば (0.3.6) 式で x を 4 とすれば $y^2 = 4$ であるから、 y は $+2$ であっても -2 であっても y^2 は 4 となるのである。つまり 2つの y と 1つの x が対応 する。このように、一つの独立変数 (x) の値に対して複数個の従属変数 (y) の値が対応するとき、 y は x の「多価関数」と言う。(0.3.6) 式の場合は一つの x に対し二つの y の値が対応するので、 y は x の 2 価関数である。

多価関数の典型的な例は三角関数である。たとえば、後にわかるが、 $\sin y$ は y の全ての冪を含むので、方程式 $\sin y = x$ で与えられる y は無限の多価関数である。たとえば $x = 0$ とすると $\sin y = 0$ であり、そうなる y は 0 であるかもしれないが、任意の整数を n としたとき $y = 180^\circ \times n$ で与えられる全ての y が $\sin y = 0$ を与える。したがって $x = 0$ と対応する y は n の数だけ(すなわち無数に)存在することになる。

さて (0.3.3) 式に戻って、関数 $f(x)$ の具体的な形を与えずに(あるいは関数が不明なときに)、与えた y に対して方程式が解け x が求められたものとして、話を先に進めなければならない場合を考える。そのときには与えられた y に対する方程式 (0.3.3) 式の解 x を

$$\langle 0-11 \rangle \quad (0.3.7) \quad x = f^{-1}(y)$$

と書く。この $f^{-1}(y)$ を関数 $f(x)$ の逆関数という[3]。簡単な例でこれを具体的に示そう。方程式を

$$\langle 0-12 \rangle \quad (0.3.8) \quad y = f(x) = ax + b$$

を考え、そして y になにか値が与えられたとする。もし a が 0 でなければ、この場合の逆関数は簡単に求まり、

$$\langle 0-13 \rangle \quad (0.3.9) \quad x = f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

である。この $\frac{y-b}{a}$ を実際に (0.3.8) 式右辺の x に代入すると確かに y が現れることは容易に確かめられるであろう。

逆関数の例をいくつか与えておく：

$$y = \begin{cases} e^x \\ \sin x \\ \sin(x^3) \\ \sqrt[3]{\sin x} \end{cases}$$

$\langle 0-14 \rangle \quad (0.3.10)$

$$\rightarrow x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \ln y \\ \sin^{-1} y \\ \sqrt[3]{\sin^{-1} y} \\ \sin^{-1}(y^3) \end{cases}$$

[1] 「MKS単位」は質量の単位に (Kg)、長さ(距離)の単位に (m)、時間の単位に(秒 (s))を用いて表した単位である。また、「CGS単位」は質量の単位に (g)、長さ(距離)の単位に (cm)、時間の単位に(秒 (s))を用いて表した単位である。

[2] ここでは独立変数を表すのに文字 x 、従属変数を表すのに文字 y を使っているが、独立変数と従属変数にこれらの文字を使う必要は必ずしもない。何が独立変数であって何が従属変数であるかは変数を表す文字で区別するのではなく、あくまでも変数が持つ役割で区別する。すなわち、我々が自由に制御することが出来る変数があればそれは独立変数であって、その変数を与えることによって決まる変数があればそれは従属変数である。したがって変数の役割が明確でありさえすれば、それらを表す文字に何を使ってもよい。同様に(0.3.3)式の関数を表すのに必ずしも f という文字を使う必要はない。それが関数であることが分かりさえすれば g でも h でも、なんでもよい。実際にその例がこれからたくさん出てくる。

[3] a の逆数 $\left(\frac{1}{a}\right)$ を指数表現で (a^{-1}) と書くが、(0.3.7)式の f の逆関数 (f^{-1}) は $\left(\frac{1}{f}\right)$ のことではない。この (f^{-1}) は関数 f の逆関数を表す記号である。違いは a が変数名であるのに対して、 f が関数名であることにある。